Réduction des endomorphismes normaux

[ROMBALDI, p 729]

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

ÉNONCÉ :

Réduction des endomorphismes normaux :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée β de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & \\ & R_1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$$

où D_p est diagonale d'ordre p et, pour $k \in \{1, \dots, r\}$,

$$R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}, b_k \neq 0, p + 2r = n$$

DÉVELOPPEMENT :

LEMME :
Soient λ une valeur propre de u, E_λ son espace propre associé, alors

- (F est u-stable) $\Longrightarrow$ ($F^\perp$ est u^*-stable)
- $E^\perp$ est u-stable.

Démonstration.

- Soit $x \in F^\perp$. On a :

$$\forall y \in F, \langle y, u^*(x)\rangle = \langle u(y), x\rangle = 0 \quad \text{car } u(y) \in F$$

- Comme E_λ est stable par u et que ce dernier commute avec u^*, E_λ est stable par u^*. Par ce qui précède, $E_\lambda^\perp$ est $(u^*)^* = u$-stable.

□

Preuve du théorème :
Voyons le résultat par récurrence sur la dimension de E, $dim(E) = n$.

- $n = 1$: Évident.
- $n = 2$:
  On distingue 2 cas :
  - Si u a une valeur propre réelle λ : Soit e_1 un vecteur propre normé. Alors si $u \neq \lambda Id$, $\mathbb{R}e_1 = E_\lambda$ donc $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est une droite engendrée par un vecteur e_2 normé stable par u par le lemme précédent, donc $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est un sous-espace propre de u. Ainsi, dans la base $\beta = (e_1, e_2)$, la matrice de u est diagonale, avec (e_1, e_2) est orthonormée.
  - Si u n'a pas de valeur propre réelle :
    Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base orthonormée de E. u est normal donc $M^T M = M M^T$, ce qui donne :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \end{cases}$$

Si $b = c$, M est symétrique, donc M admet une valeur propre réelle, ce qui est absurde. D'où $c = -b$, avec $b \neq 0$ (sinon M

serait diagonale), et donc $d = a$, ou encore $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

- Supposons $n \geq 3$ et le résultat vrai en dimension inférieure à n :
On distingue de nouveau 2 cas :

  — Si u admet une valeur propre réelle λ : Alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_{E_\lambda^\perp}$ et on obtient le résultat en concaténant une base orthonormée de E_λ avec la base obtenue, qui reste bien orthonormée.

  — Si u n'admet pas de valeur propre réelle : On considère Q un facteur irréductible du polynôme caractéristique de u χ_u. Il est de degré 2.
  Voyons que $KerQ(u) \neq 0$. Écrivons $Q = (X - \lambda)(X - \overline{\lambda})$, alors si M est la matrice de u dans une base quelconque, λ est valeur propre de M donc :

$$det(Q(M)) = det(M - \lambda I_n)det(M - \overline{\lambda} I_n) = 0$$

  Donc $Q(u)$ est non inversible donc $Q(u) \in \mathcal{L}(E)$ est non injectif.

Considérons donc $f := u|_{Ker(Q(u))}$. Alors f^*f est symétrique donc admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$. Soit x un vecteur propre associé et $F := Vect(x, u(x)) = Vect(u(x), u^2(x))$. F est stable par u, de dimension 2.
F est stable par u^*. En effet :

$$\begin{cases} u^*(u(x)) = f^*(f(x)) = \mu x \in F \\ u^*(u^2(x)) = u(u^*(u(x)) = u(\mu x) = \mu u(x) \in F \end{cases}$$

Reste à appliquer l'hypothèse de récurrence à $u|_{F^\perp}$ et le cas $n = 2$ à $u|_F$, ce qui donne le résultat voulu dans la base concaténée.

Remarques :

- On exploite le théorème spectral : il faut connaître son énoncé précis et sa preuve dans les grandes lignes.
- Dans le cas hermitien, un endomorphisme normal se diagonalise toujours dans une base orthonormée.